

# 基于 SOCP 的柔性直流牵引供电系统 极限供电能力改进模型

张建, 李笑倩\*, 魏应冬, 李占赫, 陆超

(新型电力系统运行与控制全国重点实验室(清华大学电机工程与应用电子技术系), 北京市 海淀区 100084)

## Enhancement Model of Ultimate Supply Capability for Flexible DC Traction Power Supply System Using SOCP

ZHANG Jian, LI Xiaolian\*, WEI Yingdong, LI Zhanhe, LU Chao

(State Key Laboratory of Power System Operation and Control (Dept. of Electrical Engineering, Tsinghua University),  
Haidian District, Beijing 100084, China)

**ABSTRACT:** Recently, flexible DC traction power supply systems have developed rapidly and gained widespread attention for its advantages in optimizing system power flow and improving the utilization of regenerative energy. The ultimate supply capacity (USC), which directly reflects the system's output capability, requires precise evaluation. Given the non-convex nature of the USC model and the associated challenges in finding solutions, this study focuses a novel approach for establishing the USC model of the flexible DC traction power supply system based on second order cone programming (SOCP). First, the branch power flow model is employed to enhance the system's power flow modeling technique, while the rail potential modeling is achieved by introducing a virtual zero potential and a virtual current source. Subsequently, the Taylor expansion method is utilized to linearize the rail potential expression, and the SOCP relaxation method is employed to transform and relax the USC model into a convex optimization model. In conclusion, an case study is specifically devised using Beijing Metro Line 13A to empirically verify the effectiveness of the proposed method. The findings indicate that through the utilization of the enhancement model described in this study, a significantly accurate result of the USC is achieved, resulting in a reduction of approximately 1 MW in the numerical value, as well as a 5.4-fold increase in the calculation speed. The method proposed in this paper holds profound significance for

informing the meticulous planning and design stages of flexible DC traction power supply systems.

**KEY WORDS:** flexible DC traction power supply system; ultimate supply capability; optimal power flow; convex relaxation; planning and design

**摘要:** 近年来, 柔性直流牵引供电系统获得了快速发展, 因其在优化系统潮流、提升再生能量利用率等方面具有优势而逐渐受到广泛关注。极限供电能力(ultimate supply capacity, USC)是表征柔性直流牵引供电系统输出能力的指标, 需要被精确评估。针对极限供电能力模型的非凸性以及求解上存在的问题, 该文建立基于二阶锥规划(second order cone programming, SOCP)的柔性直流牵引供电系统极限供电能力模型。首先, 利用支路潮流模型改进系统潮流建模方法并通过引入虚拟零电位和虚拟电流源实现钢轨电位建模; 其次, 利用泰勒展开方法对钢轨电位表达式进行线性化并利用 SOCP 松弛方法对极限供电能力模型进行松弛并将其转化为凸优化模型; 最后, 基于北京地铁 13A 线设计算例, 验证所提模型的有效性。结果表明, 利用改进模型获得了更为精确的极限供电能力计算结果, 在数值上降低约 1 MW, 计算速度提高 5.4 倍, 计算精度提高 14%。所提方法对于柔性直流牵引供电系统规划设计具有重要意义。

**关键词:** 柔性直流牵引供电系统; 极限供电能力; 最优潮流; 凸松弛; 规划设计

## 0 引言

近年来, 诸多新技术的应用推动了城市轨道交通的快速发展。在供电制式方面, 直流供电是目前较多采用的供电形式, 包括采用整流机组的常规直流牵引供电系统和采用电压源型变流器的柔性直流牵引供电系统。与常规系统相比, 柔性直流牵

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(52277190); 北京市科委科技计划项目(Z221100007522001)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (General Project)(52277190); Science and Technology Plan of Beijing Municipal Science and Technology Commission (Z221100007522001).

引供电系统在优化系统潮流<sup>[1-2]</sup>、提高再生能量利用率<sup>[3-4]</sup>、减少功率损耗<sup>[5-6]</sup>等方面具有突出优势。柔性直流牵引供电技术将在北京地铁13A线、天津津静线多条线路中得到应用。

供电能力是表征电力系统输出能力的重要指标。例如,输电网的输出能力可以用最大输电能力来反映<sup>[7]</sup>;配电网的输出能力可以用最大供电能力来体现<sup>[8]</sup>。在柔性直流牵引供电系统中,其输出能力则可以用极限供电能力来表征,指的是在考虑各种牵引所 $N-1$ 故障的情形下,为满足负荷需求以及安全运行约束要求,牵引所可配置的最小容量。作为一个综合反映系统经济性和安全性的综合指标,极限供电能力需要被精确评估。假如极限供电能力评估结果过于冒险,系统实际运行时,会有不可预测的风险;相反评估结果过于保守,会增加不必要的投资成本。因此,准确计算系统的极限供电能力是必要的。

为了准确计算柔性直流牵引供电系统的极限供电能力,借助最优潮流建立极限供电能力模型。极限供电能力模型的目标函数是最小化牵引所输出功率向量的无穷范数,亦即系统的极限供电能力;等式约束是系统的潮流方程,以节点功率方程的形式给出;不等式约束包括安全运行约束,包括牵引所允许输出功率约束,钢轨电位约束等。在利用上述模型和使用内点法计算系统的极限供电能力时,主要面临两方面问题:

1) 初值比较敏感。利用上述模型和方法计算得到的极限供电能力与计算初值有关,通常是局部最优解;在某些情况下,例如,牵引所的实际出力与其允许输出功率值比较接近时,当赋予的计算初值不合理,会出现不收敛情形。

2) 求解效率较低。利用上述模型和方法进行一次极限供电能力求解耗时约为16s,在系统规划设计的过程中,考虑到负荷场景集的规模、牵引所的选址方案以及容量配置方案的影响,需要重复进行上述计算,并且计算需求随着上述因素的规模的增加而增加。例如,考虑典型的规划过程,需要进行超过10000次极限供电能力评估计算,共需耗时超过44h。因此,上述方法的求解效率有待进一步提高。

在极限供电能力模型中,以潮流方程为基础的等式约束的非凸性是导致上述问题的主要原因。由于等式约束的非凸性,极限供电能力模型实质上是

一个非凸优化问题,其已经被证明是一个NP-hard问题<sup>[9-10]</sup>,在求解过程中容易陷入局部最优。尽管已有研究利用智能优化算法,如粒子群算法<sup>[11]</sup>、微分进化算法<sup>[12]</sup>及遗传算法,试图在初值选取以及提升解的最优性等方面加以改进,但模型的非凸性没有改变,并且求解效率依然无法得到保证。文献[5]提出一种近似最优潮流算法,在提高柔性直流牵引供电系统潮流求解效率方面具有很好的表现,但没有关注初值敏感问题。文献[13]建立一个高速铁路的电热综合能源优化模型,其中,为避免模型非凸性的影响并方便模型求解,牵引网的交流潮流被表述为一个基于二阶锥规划(second order cone programming, SOCP)规划问题<sup>[13]</sup>。而本文关注的是直流牵引供电系统。文献[14]提出一种适用于城市电气化交通网络扩展规划的凸规划模型<sup>[14]</sup>,与非凸模型相比,求解效率显著提高。由此可见,将非凸优化问题借助一定方法转化为凸优化问题是解决上述问题的有效方法<sup>[15]</sup>,也是本文研究的主要内容。

凸松弛方法是将原始的非凸优化问题松弛为凸优化问题。相关文献已经证明,凸优化问题具有良好的求解性能<sup>[16-17]</sup>。获得广泛应用的凸松弛方法主要包括半正定规划(semidefinite programming, SDP)松弛以及SOCP松弛<sup>[18-19]</sup>。SDP松弛是通过引入一个秩为1的半正定矩阵变量代替非凸的等式约束并舍弃秩为1这一条件实现的<sup>[20]</sup>。SOCP松弛是通过利用上述矩阵变量半正定的特点,进一步将其松弛为二阶锥约束实现的<sup>[21]</sup>。在同等条件下,与SDP松弛方法相比,SOCP松弛方法具有较低的计算复杂度,可以显著提高计算效率<sup>[22]</sup>。文献[23]同时指出,实际应用中需要关注SOCP松弛方法的误差。此外,为了方便和直接进行SOCP松弛,文献[21]对潮流建模过程进行改进,基于Distflow模型提出更方便进行SOCP松弛的支路潮流模型<sup>[24]</sup>。本文即采用该方法对现有模型进行改进,但柔性直流牵引供电系统建模还需考虑回流网,即若将系统的接触网建模和回流网建模统一考虑,会显著增加优化变量以及约束规模,影响模型求解效率,因此,既有方法无法直接应用。

为了保证柔性直流牵引供电系统极限供电能力模型的精确和高效求解,本文研究基于SOCP的柔性直流牵引供电系统极限供电能力改进模型。首先,利用支路潮流模型改进系统潮流建模方法并通过引入虚拟零电位和虚拟电流源实现钢轨电位建

模；其次，由于改进模型中钢轨电位的非线性影响模型求解，本文利用泰勒展开方法对钢轨电位表达式进行线性化并利用 SOCP 松弛方法对极限供电能力模型进行松弛并转化为凸优化模型，实现模型的改进；最后，基于北京地铁 13A 线设计算例，对比利用本文所提改进模型以及基础的极限供电能力模型的求解效率以及准确性，并对松弛间隙、钢轨电位线性化误差以及线性化点的选择进行讨论。

### 1 基础的极限供电能力模型

#### 1.1 系统配置

图 1 显示了柔性直流牵引供电系统的基本组成和配置，基于电压源型的双向变流器成为牵引供电系统和公用电网之间能量转换的纽带，在牵引供电系统内部，电能可以在双向变流器、接触网、机车、钢轨组成的闭环网络内传输。

完整的牵引供电系统模型如图 2 所示，主要包括接触网以及由钢轨和接地系统组成的回流网，在

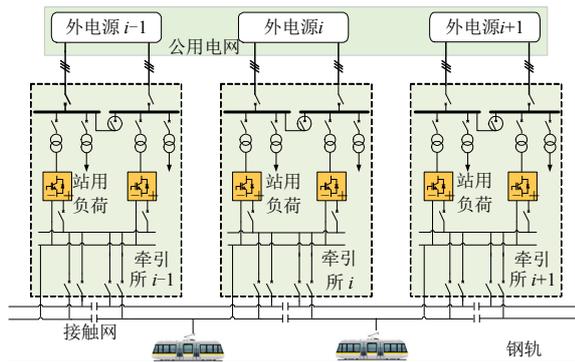


图 1 柔性直流牵引供电系统组成  
Fig. 1 Composition of flexible DC traction power supply system

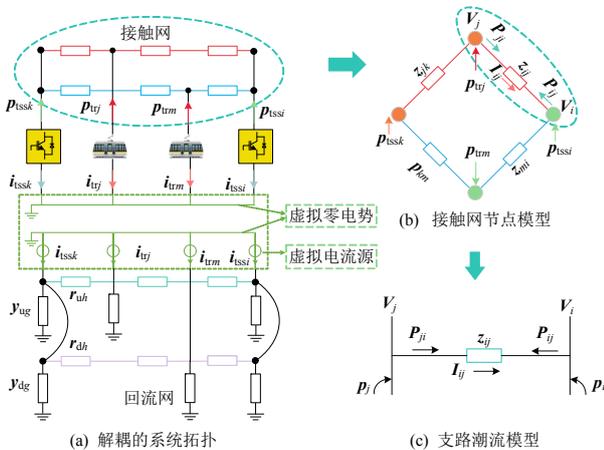


图 2 柔性直流牵引供电系统潮流分析模型  
Fig. 2 Power flow analysis model of flexible DC traction power supply system

系统建模上，接触网以及回流网常作为一个整体考虑。例如，现有研究通常对接触网和回流网进行统一建模，对于一个含有  $N$  个牵引所以及  $M$  辆机车的系统，当采用统一建模方法并考虑接地节点时，系统的节点数目为  $2(N+M)+1$ ，为表达方便，节点集合和支路集合分别记作  $\Phi$  和  $\Omega$ 。上述方法生成的节点导纳矩阵规模较大，导致后续潮流计算求解效率低，本文通过引入虚拟零电位实现接触网以及回流网的解耦<sup>[25]</sup>。

#### 1.2 基于节点注入模型的极限供电能力模型

柔性直流牵引供电系统的极限供电能力可以用牵引所的负载能力表征。指的是在考虑各种牵引所  $N-1$  故障的情形下，为满足负荷需求以及安全运行约束要求，牵引所可配置的最小容量。图 2(a)是系统节点注入模型，其中牵引所及机车被视作网络的节点，机车建模为功率源，向节点注入功率<sup>[26]</sup>。极限供电能力模型如式(1)所示。

$$\begin{cases} U_{SC} = \min \|p_{TSS}\|_{\infty} \\ \text{s.t. } p_i = V_i \sum_{j \in J-i} (V_i - V_j) / z_{ij} \\ V^{lb} \leq V_i \leq V^{ub} \\ p_{TSS,i} \leq |A_{OP}| \\ U_r^{lb} \leq U_r \leq U_r^{ub} \\ I_b^{lb} \leq I_b \leq I_b^{ub} \end{cases} \quad (1)$$

式中： $P_{TSS}$  为牵引所节点注入功率组成的列向量； $p_i$  为节点注入功率，包括牵引所节点和机车节点； $A_{OP}$ (allowable output power, AOP)是牵引所允许输出功率的限制值，其值记为； $V_i$  为节点电压，包括牵引所节点和机车节点； $V^{ub}$ 、 $V^{lb}$  分别为节点电压上、下限； $U_r$  为钢轨电位向量，表达式见式(6)； $U_r^{ub}$ 、 $U_r^{lb}$  分别为钢轨电位上、下限； $I_b$  为接触网电流， $I_b^{ub}$ 、 $I_b^{lb}$  分别为其上、下限。

式(1)定义了极限供电能力的表达式并包括网络的节点功率平衡约束、节点电压约束、节点功率约束、钢轨电位约束以及接触网电流约束。式(1)是目前计算柔性直流牵引供电系统极限供电能力的基础模型，对于牵引所的选址定容以及规划方案的安全校验具有重要意义<sup>[27]</sup>。但是，节点功率平衡约束的存在使得模型具有非凸性并且极端情况下会导致模型难以收敛<sup>[28]</sup>，这种情况在牵引所的实际输出功率接近允许输出功率时特别突出，极大地影响了极限供电能力的计算效率。因此，本文做如下改进。

## 2 基于 SOCP 的极限供电能力改进模型

为了解决上述问题,本节采用支路潮流模型对极限供电能力模型进行重新表述,以便于后续进行凸松弛转化。考虑到柔性直流牵引供电系统网络拓扑,采用 1.1 节中的系统解耦模型。

### 2.1 改进模型的潮流建模

图 2(c)是系统的支路潮流模型,利用该模型,可以列写支路潮流平衡关系,如下列各式所示:

$$p_i = \sum_{j:j-i} P_{ij} \quad (2)$$

$$P_{ij} + P_{ji} = z_{ij} I_{ij}^2 \quad (3)$$

$$V_i - V_j = z_{ij} I_{ij} \quad (4)$$

$$I_{ij}^2 = \frac{P_{ij}^2}{V_i^2} \quad (5)$$

式(1)通过引入支路功率变量  $P_{ij}$  取代式(1)中节点注入功率的表示方式,当节点为牵引所时,  $p_i$  为待优化变量;当节点为机车节点时,  $p_i = \lambda p_{tr,k}$ , 其中  $p_{tr,k}$  为第  $k$  辆机车的功率,由牵引计算给出,  $\lambda$  为牵引负荷变化系数,一般取 1。式(2)为利用支路功率表示的支路损耗;式(3)为支路电压降;式(4)为支路电流与支路功率的关系。

### 2.2 改进模型的钢轨电位建模

如图 2(a)所示,尽管通过引入虚拟零电位实现了接触网与回流网的解耦,但仍需考虑牵引电流引起的钢轨电位问题,为了研究牵引电流的影响,在回流网中同时引入虚拟电流源,其电流值由系统节点注入电流  $\mathbf{i}_s = [\mathbf{i}_{TR}; \mathbf{i}_{TSS}]$  确定,并由潮流计算得到;对于接地系统,本文采用其集中参数,并忽略分布参数的影响。经过上述处理,在解耦的回流网中,钢轨电位可由下式描述:

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{Y}_r^{-1} \mathbf{i}_s = \mathbf{Y}_r^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{U}_s \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{Y}_r$  为回流网的节点导纳矩阵,可由各段钢轨阻抗及对应的接地电阻生成;  $\mathbf{U}_r$  为  $(M+N)$  维的钢轨电位列向量;  $\mathbf{Y}$  为接触网的节点导纳矩阵,由接触网电阻和钢轨电阻生成;  $\mathbf{U}_s$  为牵引所节点电压和机车节点电压组成的列向量。

### 2.3 改进模型的凸松弛、线性化

式(3)~(5)中含有节点电压、节点注入电流,并且形式不统一,可重述成下述统一的形式:

$$P_{ij} + P_{ji} = z_{ij} \ell_{ij} \quad (6)$$

$$v_i - v_j = z_{ij} (P_{ij} - P_{ji}) \quad (7)$$

$$\ell_{ij} = \frac{P_{ij}^2}{v_{s,i}} \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{Y}_r^{-1} \mathbf{Y} \sqrt{\mathbf{v}_s} \quad (9)$$

式中  $\ell_{ij} = I_{ij}^2$ 、 $v_{s,i} = V_i^2$ 、 $v_{s,j} = V_j^2$ 、 $\mathbf{v}_s = \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{U}_s$  为引入的线性变量。为了简便表述,将式(9)简记为  $\mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s)$ 。根据多元泰勒展开公式,对式(9)进行展开,可得:

$$\mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s) = \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0) + [\nabla \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0)]^T (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s^0) + O^n(\mathbf{v}_s) \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_r(\mathbf{v}_s) = \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0) + [\nabla \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0)]^T (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s^0) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{v}_s^0$  为已知的各节点电压的平方向量。为了对钢轨电位表达式进行线性化,忽略式(10)中的二次及高阶无穷小量,如式(11)所示。对式(8)所示的二次项约束,它在形式上是非凸的,可利用凸松弛方法进行处理,重述如下:

$$\left\| \frac{2P_{ij}}{v_{s,i} - \ell_{ij}} \right\|_2 \leq (v_{s,i} + \ell_{ij}) \quad (12)$$

### 2.4 改进模型的求解

安全运行约束是极限供电能力评估必须要考虑的,包括:各牵引所的运行电压约束、牵引所允许输出功率约束、接触网线路传输功率约束、钢轨电位约束。完整的极限供电能力评估模型如式(13)所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{SC} = \min \|\mathbf{p}_{TSS}\|_{\infty} \\ \text{s.t. } p_i = \sum_{j:j-i} P_{ij} \\ P_{ij} + P_{ji} = z_{ij} \ell_{ij} \\ v_{s,i} - v_{s,j} = z_{ij} (P_{ij} - P_{ji}) \\ \tilde{\mathbf{U}}_r(\mathbf{v}_s) = \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0) + [\nabla \mathbf{U}_r(\mathbf{v}_s^0)]^T (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s^0) \\ \left\| \frac{2P_{ij}}{v_{s,i} - \ell_{ij}} \right\|_2 \leq (v_{s,i} + \ell_{ij}) \\ V_i^2 \leq v_{s,i} \leq \bar{V}_i^2 \\ p_{TSS,i} \leq |A_{OP}| \\ P_{ij} \leq |P_b| \\ \mathbf{U}_r \leq \mathbf{U}_r \leq \bar{\mathbf{U}}_r \end{array} \right. \quad (13)$$

## 3 改进模型有效性验证

为验证所提模型的有效性,基于北京地铁 13 号线扩建工程——北京地铁 13A 线北段设计了算例,该段线路对应供电系统属于柔性直流牵引供电系统。系统的拓扑结构如图 3 所示,柔性直流牵引供电系统由接触网、牵引所、机车以及回流网组成。

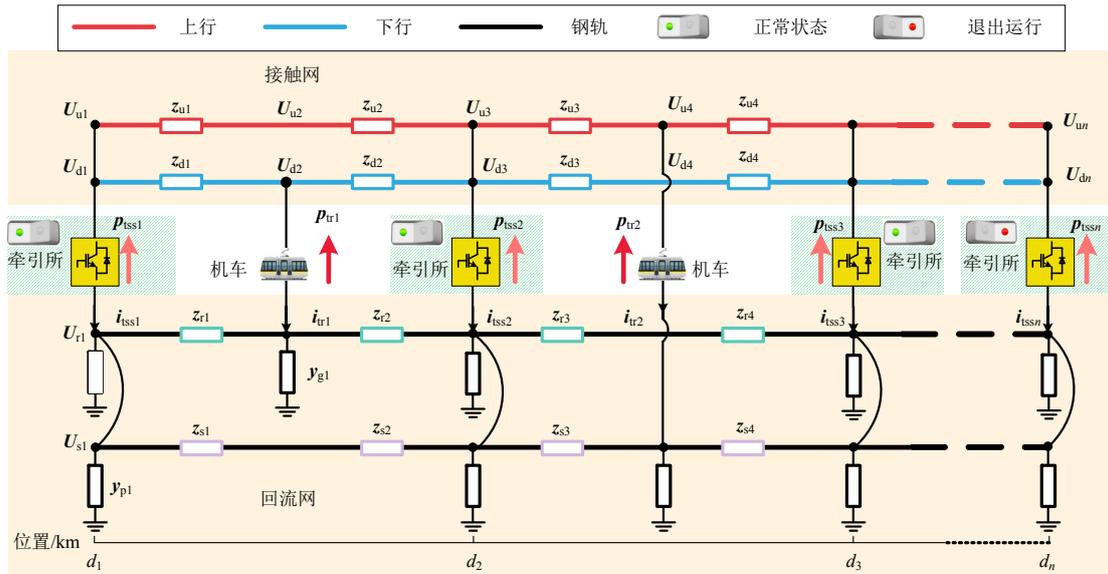


图 3 柔性直流牵引供电系统拓扑结构图

Fig. 3 Topology diagram of flexible DC traction power supply system

接触网分为上行接触网和下行接触网；牵引所沿着接触网呈长链状分布，本算例中考虑 12 个牵引所，对应的牵引所节点数目为 12，其间距如附表 A2 所示；列车通过接触网进行电能的交互，本算例中考虑的机车数目为 46，对应的机车节点数目为 46。回流网主要由钢轨及接地系统组成，在潮流建模时，主要借鉴文献[4]中的模型。牵引供电系统线路上牵引所的位置和基本参数如附表 A2、A3 所示。本算例中选择 900~1 000 s 时间范围内的牵引负荷，系统的运行方式选择为牵引所 6 退出运行，该运行方式为最严重的牵引所  $N-1$  故障情形，相关的分析过程较为复杂，本文暂不涉及。所有牵引所的  $A_{OP}$  被设置为 16MW。设计了如下算例：

Case-I：采用本文的凸松弛方法建模利用 CPLEX 求解；

Case-II：采用节点注入模型建模，并利用原对偶内点法求解(fmincon)；

为了方便对比两种案例求解的极限供电能力结果，按照文献[16]所示的方法，定义如式(14)所示的优化间隙<sup>[16]</sup>：

$$G_{ap-opt} = \frac{U_{SC-内点法} - U_{SC-凸松弛}}{U_{SC-内点法}} \quad (14)$$

### 3.1 改进模型的松弛间隙和线性化误差

为分析凸松弛和钢轨电位线性化误差，定义了所有支路( $i \sim j$ )的最大松弛间隙  $G_{ap-soc}$  以及钢轨电位线性化误差  $\epsilon_r$ ，分别如式(16)及(17)所示。式(16)将最大松弛间隙定义为所有支路电流与实际支路电

流的平方的差值的最大值，该指标是评价松弛解的重要指标。式(17)给出钢轨电位线性化误差的表达式，由于在所有误差当中只关心最大的误差，因此用实际钢轨电位与线性化的钢轨电位的差的无穷范数表示。通过算例仿真，分别计算了 900~1 000 s 负荷断面下，各支路的最大松弛间隙以及钢轨电位线性化误差如图 4 所示。可知，利用本文提出的方法，计算得到的最大松弛间隙均在  $10^{-5}$  数量级，而轨电位误差的最大值在 0~16 V 之间并且实际轨电位均不违反约束。

$$G_{ap-soc} = \max_{i,j \in \Phi, j \sim i} |l_{ij} - P_{ij}^2 / v_{s,i}| \quad (15)$$

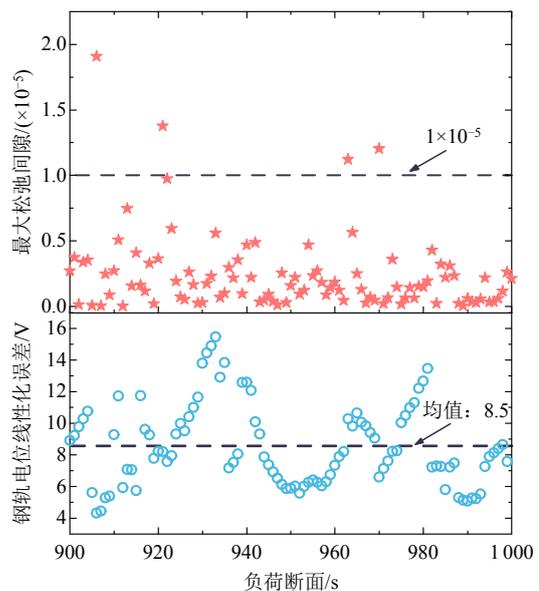


图 4 Case-II 对应的松弛间隙和轨电位误差

Fig. 4 Slack gap and rail potential linearization error corresponding to Case-II

$$\varepsilon_r = \|\tilde{U}_r - U_r\|_\infty \quad (16)$$

### 3.2 改进模型与基础模型的求解效果对比

为了进一步验证模型的求解效率,在相同的系

统参数下,牵引所6处于退出运行状态,分别基于Case-I和Case-II计算出系统的极限供电能力。其中,负荷断面选择的是第997s,机车的出力情况如图5(b)、(e)所示。

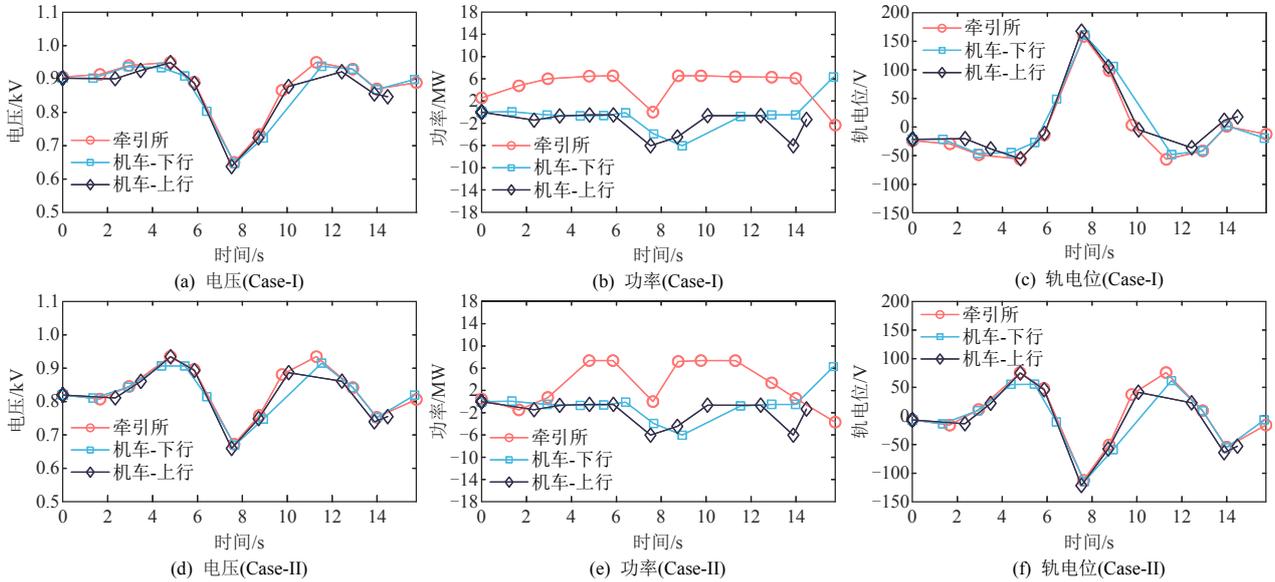


图5 各算例的系统潮流分布结果

Fig. 5 Power flow distribution results under different calculation examples

为了对比改进模型与基础模型对初值的敏感程度,首先基于Case-I和Case-II分析了不同模型对初值的敏感程度,由于改进模型不需要提供初值,因此未设置优化初值;对于基础模型分别设置所有牵引所节点的电压迭代初值分别为 $V_1=0.86\text{ kV}$ 和 $V_2=0.95\text{ kV}$ ,所有机车节点的电压迭代初值均相同。结果如图6所示。在图6中,当设置不同的电压初值时,基础模型的求解结果差异较大,甚至会因初值的不同表现出牵引和回馈两种运行状态,而改进模型由于不需要初值,因此不存在初值敏感问题。

Case-I和Case-II的求解结果如表1所示。在优化时长方面,本文方法显著降低了优化时间,求解速度提升了5.4倍。相比于利用内点法得到的USC,本文方法计算的USC降低了1.03MW,优化间隙为14%。

基于Case-I和Case-II的第997s的断面潮流分布如图3所示。由图5(a)、(b)和5(d)、(e)可知,本文所提方法计算得到的极限供电能力(ultimate supply capacity, USC)更小,这主要是由于更多的牵引所参与到对退出的牵引所的功率支援过程中,具体来说,相对于Case-II中牵引所4、5、7、8、9对故障牵引所进行功率支援,Case-I通过电压调节,实现牵引所2、3、10、11也同时对故障牵引所进

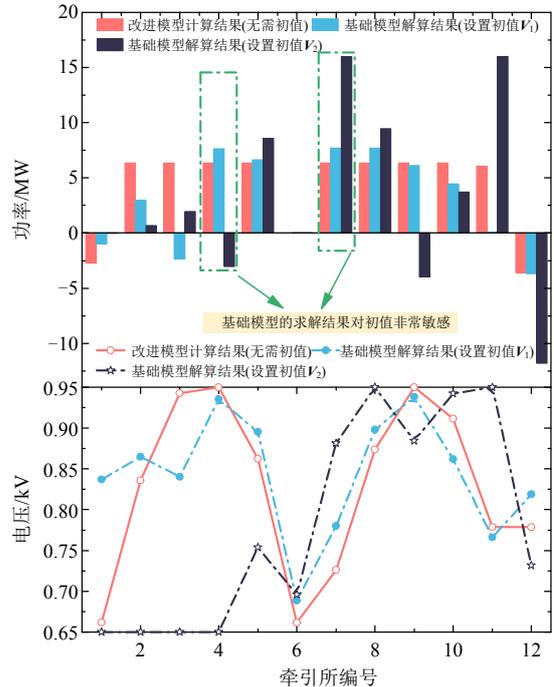


图6 改进模型与基础模型的原值敏感性分析

Fig. 6 Comparison of the sensitivity of the enhancement model and the basic model to initial values

表1 计算效率比较

Table 1 Comparison of computational efficiency

方法	优化时长/s	$U_{sc}/\text{MW}$	优化间隙/%
内点法	16	7.37	14
本文方法	2.5	6.34	

行功率支援, 其结果是降低了每个牵引所的出力, 从而实现 USC 的减少。但是, 需要注意到, 功率的跨区传输也对轨电位影响较大, 见图 5(c)、(f)。

#### 4.3 改进模型中钢轨电位线性化点的选择

图 7 展示了  $v_s^0$  的选择对钢轨电位的影响, 由图 7 可知, 在对钢轨电位的表达式进行线性化的过程中, 合理选择是非常必要的, 首次计算时,  $v_s^0$  被统一设置为牵引所节点电压上、下限值的平均值的平方, 如式(18)所示。在 Case-I 的基础上调整  $v_s^0$ , 其变化范围为[0.36,0.81], 结果表明随着  $v_s^0$  的增大, 线性化的钢轨电位的最大值先不变, 后减少, 部分条件下对应的钢轨电位值超过限制值; 而实际的钢轨电位的最大值则先增大, 后减小, 但都不超过钢轨电位限制值的上限。线性化的钢轨电位的最小值先减小后增大, 在  $v_s^0$  小于 0.64 时, 钢轨电位超过其限制值的下限, 而当  $v_s^0$  大于 0.64 时, 钢轨电位满足约束; 实际的钢轨电位最小值呈减小的趋势, 当  $v_s^0$  大于 0.68 时, 实际钢轨电位最小值则不满足约束。

$$v_s^0 = [(V^{ub} + V^{lb})/2]^2 \quad (17)$$

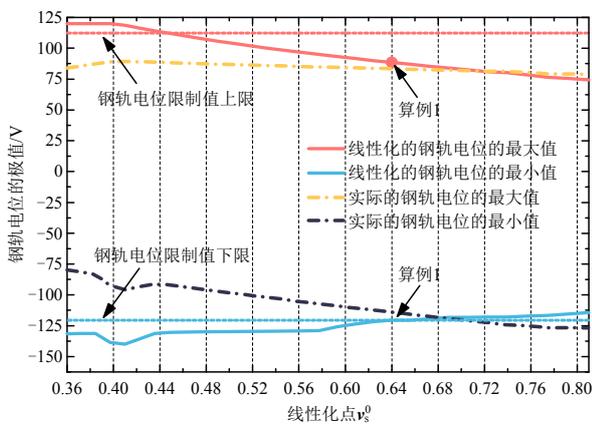


图 7  $v_s^0$  的选择对钢轨电位的影响

Fig. 7 Effect of the selection of  $v_s^0$  on rail potential

显然,  $v_s^0$  并不是随意选择的, 例如, 当  $v_s^0 < 0.64$  时, 线性化的钢轨电位值已经超过限制值的下限, 而实际的钢轨电位值依然满足要求, 这表明不恰当的选择  $v_s^0$  会使钢轨电位计算误差较大。在潮流有解的情况下, 选择线性化点考虑的主要因素是钢轨电位限制值以及钢轨电位实际值和线性化值之间的最大误差。即线性化点  $v_s^0$  一方面要保证线性化后的钢轨电位不违反钢轨电位限制值, 另一方面需要保证钢轨电位实际值和线性化值之间的最大误差不超过式(16)给出的  $\epsilon_s$ 。

## 4 结论

本文主要研究基于 SOCP 的柔性直流牵引供电系统极限供电能力改进模型。相比于基础的极限供电能力模型, 本文在以下 3 个方面进行改进:

1) 模型的非凸性得以改进。基础的极限供电能力模型由于功率等式约束的双线性项的存在而具有较强的非凸性, 本文利用支路潮流模型对系统潮流进行重新表述, 并利用二阶锥松弛方法实现模型的凸松弛转化。

2) 初值敏感问题得以改善。基础的极限供电能力模型在求解时存在初值敏感问题, 并且不易获得全局最优解, 本文通过对基础模型进行凸松弛转化, 可实现极限供电能力的求解不再依赖初值。

3) 模型求解效率得以提高。基础的极限供电能力模型存在求解效率较低等问题, 进行一次极限供电能力求解耗时约 16s, 本文通过对基础模型进行改进, 进行一次极限供电能力求解耗时约 2.5s。

在模型的求解精度和表现上, 本文所提改进模型的松弛间隙为  $10^{-5}$  数量级、钢轨电位线性化误差最大为 16V。与基础的极限供电能力模型相比, 通过利用本文所提方法改进模型计算得到的获得了更为精确的系统的极限供电能力计算结果, 在数值上降低了约 1MW, 计算速度提高了 5.4 倍, 计算精度提高了约 14%。极限供电能力是柔性直流牵引供电系统规划阶段需要参考的重要指标, 对于指导系统安全可靠运行也具有重要意义。如何将极限供电能力指标纳入系统规划流程中去是下一步亟待研究的问题, 因此, 未来考虑以本文研究的极限供电能力改进模型为基础, 进行柔性直流牵引供电系统规划模型的深入研究。

## 参考文献

- [1] 张钢, 郝峰杰, 王运达, 等. 城轨柔性牵引供电系统及优化控制研究[J]. 电工技术学报, 2022, 37(S1): 153-162.  
ZHANG Gang, HAO Fengjie, WANG Yunda, et al. Research on urban rail transit flexible traction power systems and optimal control[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37(S1): 153-162(in Chinese).
- [2] 刘芸江, 胡海涛, 杨孝伟, 等. 柔性中压直流铁路牵引供电系统分布式协调控制策略[J]. 电力自动化设备, 2022, 42(12): 184-190.  
LIU Yunjiang, HU Haitao, YANG Xiaowei, et al. Distributed coordinated control strategy for flexible

- medium voltage direct current railway traction power system[J]. *Electric Power Automation Equipment*, 2022, 42(12): 184-190(in Chinese).
- [3] 施仲衡, 丁树奎. 城市轨道交通绿色低碳发展策略[J]. 都市轨道交通, 2022, 35(1): 1-4, 11.  
SHI Zhongheng, DING Shukui. Strategies for green and low-carbon development of urban rail transit[J]. *Urban Rapid Rail Transit*, 2022, 35(1): 1-4, 11(in Chinese).
- [4] 叶润峰, 魏应冬, 李占赫, 等. 城市轨道交通柔性直流牵引供电系统钢轨电位快速计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2023, 43(14): 5311-5318.  
YE Runfeng, WEI Yingdong, LI Zhanhe, et al. Fast calculation of rail potential of flexible DC traction power supply system for urban rail transit[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2023, 43(14): 5311-5318(in Chinese).
- [5] LI Zhanhe, LI Xiaoqian, WEI Yingdong, et al. Fast quasi-optimal power flow of flexible DC traction power systems[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2024, 39(1): 1555-1567.
- [6] 邓文丽, 戴朝华, 陈维荣. 轨道交通能源互联网背景下光伏在交/直流牵引供电系统中的应用及关键问题分析[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(19): 5692-5702.  
DENG Wenli, DAI Zhaohua, CHEN Weirong. Application of PV generation in AC/DC traction power supply system and the key problem analysis under the background of rail transit energy internet[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2019, 39(19): 5692-5702(in Chinese).
- [7] 李国庆, 王成山, 余贻鑫. 大型互联电力系统区域间功率交换能力研究综述[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(4): 20-25.  
LI Guoqing, WANG Chengshan, YU Yixin. A survey on transmission transfer capability of interconnected electric power systems[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2001, 21(4): 20-25(in Chinese).
- [8] 王成山, 罗凤章, 肖峻, 等. 基于主变互联关系的配电系统供电能力计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(13): 86-91.  
WANG Chengshan, LUO Fengzhang, XIAO Jun, et al. An evaluation method for power supply capability of distribution system based on analyzing interconnections of main transformers[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2009, 29(13): 86-91(in Chinese).
- [9] LEHMANN K, GRASTIEN A, VAN HENTENRYCK P. AC-feasibility on tree networks is NP-hard[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(1): 798-801.
- [10] BIENSTOCK D, VERMA A. Strong NP-hardness of AC power flows feasibility[J]. *Operations Research Letters*, 2019, 47(6): 494-501.
- [11] LIU Li, DAI Ningyi, LAO Kengweng, et al. Nonuniform power factor partial compensation for compensating current reduction using particle swarm optimization in traction power supply system[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(6): 6140-6151.
- [12] 刘自发, 张建华. 一种求解电力经济负荷分配问题的改进微分进化算法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(10): 100-105.  
LIU Zifa, ZHANG Jianhua. An improved differential evolution algorithm for economic dispatch of power systems[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2008, 28(10): 100-105(in Chinese).
- [13] JIANG Lizhou, BIE Zhaohong, LONG Tao, et al. Distributed energy management of integrated electricity-thermal systems for high-speed railway traction grids and stations[J]. *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, 2021, 7(3): 541-554.
- [14] WEI Wei, WU Lei, WANG Jianhui, et al. Expansion planning of urban electrified transportation networks: a mixed-integer convex programming approach[J]. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2017, 3(1): 210-224.
- [15] 林哲, 胡泽春, 宋永华. 最优潮流问题的凸松弛技术综述[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(13): 3717-3727.  
LIN Zhe, HU Zechun, SONG Yonghua. Convex relaxation for optimal power flow problem: a recent review [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2019, 39(13): 3717-3727(in Chinese).
- [16] TAYLOR J A. *Convex optimization of power systems* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- [17] JIA Wenhao, DING Tao, HUANG Can, et al. Convex optimization of integrated power-gas energy flow model with applications to probabilistic energy flow[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2021, 36(2): 1432-1441.
- [18] MADANI R, SOJOURI S, LAVAEI J. Convex relaxation for optimal power flow problem: mesh networks[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2015, 30(1): 199-211.
- [19] GAN Lingwen, LI Na, TOPCU U, et al. Exact convex relaxation of optimal power flow in radial networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(1): 72-87.
- [20] JABR R A. Exploiting sparsity in SDP relaxations of the OPF problem[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012, 27(2): 1138-1139.
- [21] BARADAR M, HESAMZADEH M R, GHANDHARI M. Second-order cone programming for optimal power flow in VSC-type AC-DC grids[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(4): 4282-4291.
- [22] GAN Lingwen, LOW S H. Optimal power flow in direct current networks[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2014, 29(6): 2892-2904.
- [23] CHEN Kening, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. A method to evaluate total supply capability of distribution systems considering network reconfiguration and daily load curves[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(3): 2096-2104.

[24] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification—Part I[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(3): 2554-2564.

[25] 杨宏钧, 刘俊良, 杜雄, 等. 适应负荷时空特性的铁路电能质量混合治理装置及控制策略研究[J/OL]. 中国电机工程学报, 2024, 1-13[2024-10-21]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20240318.1847.012.html>. YANG Hongjun, LIU Junliang, DU Xiong, et al. Research on hybrid governance device and control strategy of railway power quality adapted to the spatial and temporal characteristics of load[J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2024, 1-13[2024-10-21]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20240318.1847.012.html>(in Chinese).

[26] 李炎, 林飞, 钟志宏, 等. 基于改进型深度确定性策略梯度算法的城轨地面式储能系统能量管理策略[J/OL]. 中国电机工程学报, 2024, 1-14[2024-11-22]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.tM.20241009.1657.034.html>. LI Yan, LIN Fei, ZHONG Zhihong, et al. Energy management strategy of urban rail wayside energy storage system based on improved deep deterministic policy gradient algorithm[J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2024, 1-14[2024-11-22]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.tM.20241009.1657.034.html>(in Chinese).

[27] 李欣, 卢景涛, 黄文勋. 绿电牵引场景下高速铁路长大坡道混合储能系统容量优化配置[J/OL]. 中国电机工程学报, 2024, 1-14[2024-05-21]. <https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.232070>. LI Xin, LU Jingtao, HUANG Wengxun. Capacity optimization configuration of hybrid energy storage system for long steep slope of high-speed railway under green electric traction scenarios[J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2024, 1-14[2024-05-21]. <https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.232070>(in Chinese).

[28] 杨旻, 王佳昕, 章家维, 等. 电力系统调度模型交流可行解的恢复算法[J/OL]. 中国电机工程学报, 2024, 1-15[2024-12-31]. <https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.241538>. YANG Min, WANG Jiaxin, ZHANG Jiawei, et al. AC feasibility restoration algorithm of power system scheduling model[J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2024, 1-15[2024-12-31]. <https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.241538>.

pcsee.241538(in Chinese).

附录 A

表 A1 北京地铁 13 A 线牵引所站间距

Table A1 TSS spacing of metro line 13 A

序号	位置/km	序号	位置/km
1	0	7	8.76
2	1.66	8	9.77
3	2.95	9	11.3
4	4.79	10	12.92
5	5.85	11	13.99
6	7.63	12	15.75

表 A2 北京地铁 13 A 线系统参数

Table A2 System parameter of metro line 13 A

参数	值
机车最大牵引功率/MW	6.05
机车最大反送功率/MW	-9.58
变流器最大输出电压/kV	0.90
N-1 情况下变流器最大输出电压/kV	0.95
变流器效率/%	98
牵引所的允许输出功率/MW	16
接触网单位长度阻抗/(Ω/km)	0.0078
钢轨电位单位长度电阻/(Ω/km)	0.02
机车发车间隔/min	2
停车时间/s	30~40



张建

在线出版日期: 2024-04-09。

收稿日期: 2024-03-06。

作者简介:

张建(1997), 男, 硕士研究生, 研究方向为轨道交通柔性供电技术, [qhuzj0203@163.com](mailto:qhuzj0203@163.com);

\*通信作者: 李笑倩(1987), 女, 博士, 副研究员, 研究方向为大功率电力电子变流器、轨道交通柔性供电技术, [lixq-dee@tsinghua.edu.cn](mailto:lixq-dee@tsinghua.edu.cn)。

(责任编辑 邱丽萍)